

# Modelowanie procesów przewodnictwa ciepła i sterowanie nimi

Wojciech Mitkowski, Krzysztof Oprzędkiewicz

## Wstęp

Problemy nagrzewania są jednymi z ważniejszych zagadnień w naukach technicznych. W procesach przemysłowych koszty produkcji można obniżyć, minimalizując zużycie energii [8, 26, 31], głównie zamienianej na ciepło. Do modelowania matematycznego procesów cieplnych wykorzystuje się równania różniczkowe cząstkowe typu parabolicznego z różnymi warunkami brzegowymi [19, 18, 71]. Praktycznie, projektując odpowiednie układy regulacji temperatury, wystarczy posłużyć się liniowymi, skończone wymiarowymi modelami stacjonarnymi, np. w postaci odpowiednich transmitancji [50, 54, 67, 68]. Inną klasę modeli wykorzystywaną do modelowania procesów cieplnych stanowią układy z opóźnieniem [56, 68, str. 71]. W dalszym etapie projektowania, dla przyjętej klasy modelu procesu cieplnego, automatycznie dokonuje syntezy regulatora odpowiedniego typu, często regulatora typu PID, również w wersji dyskretny w czasie, umożliwiającej sterowanie komputerowe [28, 68, str. 79].

Przy zmianach temperatury zmieniają się właściwości nagrzewanego materiału oraz mogą wystąpić odpowiednie przemiany fazowe. Aby umożliwić dokładniejszą obserwację zachodzących zjawisk, należy wykorzystać bardziej złożone modele matematyczne, a mianowicie modele o parametrach rozłożonych w postaci równań różniczkowych cząstkowych różnych typów [19], również niecałkowitego rzędu po czasie lub przestrzeni [36, 49, 55]. Od sposobu nagrzewania materiału zależą jego właściwości [35, 37, 73]. Na przykład, rodzaj otrzymanej stali zależy od przebiegu procesu technologicznego, który jest prowadzony w zadanych przedziałach temperatury. W pewnych zakresach temperatury materiały z pamięcią powracają do z góry zadanego kształtu [73], co można wykorzystać np. w medycynie przy operacjach ortopedycznych.

W tym rozdziale przedstawiono kilka przykładów problemów nagrzewania, rozważając jednowymiarowe (przestrzenne) równanie paraboliczne. Wykorzystano wcześniejsze wyniki uzyskane przez autorów [43, 44]. W pierwszej kolejności omówiono dwa przykłady z pracy [29]: pierwszy dotyczy nagrzewania pręta metalowego elektrycznym elementem grzejnym umieszczonym na jednym z końców pręta, drugi – nagrzewania prądem elektrycznym przepływającym przez pręt (przewód elektryczny). Prąd elektryczny, przepływając przez oporowy przewód o skończonej długości, powoduje wydzielanie ciepła i nagrzewanie przewodu, doprowadzając go w pobliżu jego środka do granicy topliwości, co umożliwia wykonanie odpowiednich prób plastometrycznych [29, 32, str. 184].

Kolejny przykład [29, 37] dotyczy uproszczonego procesu krzepnięcia (z pominięciem stężeń masowych poszczególnych składników fazy stałej i ciekłej). W tym przykładzie wskazano na możliwości sterowania frontem przemiany [35, 45]. Problem krzepnięcia (problem zmiany fazy skupienia)

**Streszczenie:** W tym rozdziale przedstawiono kilka przykładów problemów nagrzewania opisywanych jednowymiarowym równaniem cząstkowym typu parabolicznego. Dwa przykłady dotyczą nagrzewania pręta metalowego na dwa sposoby: elektrycznym elementem grzejnym oraz prądem elektrycznym przepływającym przez ten pręt. Kolejny przykład dotyczy uproszczonego procesu krzepnięcia. Wskazano w nim możliwości sterowania frontem przemiany fazowej. W kolejnym podrozdziale rozważono praktyczny proces nagrzewania cienkich słabów w piecu grzewczym. Zaproponowano odpowiedni algorytm sterowania częściowo zweryfikowany praktycznie. W podsumowaniu rozdziału zwrócono uwagę na układy niecałkowitego rzędu wykorzystywane do modelowania procesów cieplnych. Zasygnalizowano również inne możliwości zastosowań technicznych.

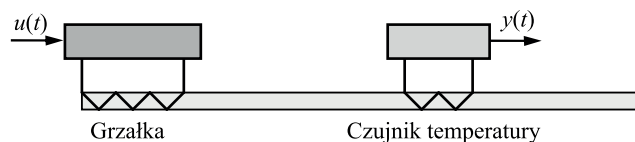
można modelować równaniami różniczkowymi cząstkowymi typu parabolicznego z ruchomą granicą. Właściwości stopu (tu stopu z pamięcią [73]) zależą od szybkości przemieszczania się frontu krystalizacji i od końcowego rozkładu stężenia domieszki w kryształach [16]. W tym rozdziale przedstawiono jedynie uproszczony model matematyczny jednowymiarowego procesu krzepnięcia [18, str. 178; 20] (zobacz również [13, 71, str. 233]). Wykorzystując skończone wymiarową aproksymację, zaproponowano skuteczny układ regulacji procesu krzepnięcia.

Rozważono również praktyczny proces nagrzewania cienkich słabów w piecu grzewczym i przedstawiono odpowiedni algorytm sterowania [28, str. 49; również 70].

W podsumowaniu rozdziału zwrócono uwagę na układy niecałkowitego rzędu [17, 64] wykorzystywane do modelowania procesów cieplnych [25, 54]. Zasygnalizowano również inne możliwości zastosowań technicznych, omówione w następujących pracach: [2, 3, 21–24, 27, 31, 46, 70].

## Nagrzewanie pręta

Rozważmy układ laboratoryjny nagrzewania cienkiego pręta [29, 32, str. 182; 52], który jest pokazany schematycznie na rys. 25.1. Układ laboratoryjny został zbudowany (i jest dalej rozbudowywany) przez K. Oprzędkiewicza i znajduje się w Katedrze Automatyki i Robotyki AGH.



Rysunek 25.1. Schemat nagrzewania pręta

Miedziany pręt o długości  $l = 260$  mm i średnicy 2 mm jest ogrzewany na jednym końcu elektrycznym elementem grzejnym (spirała nawinięta na izolator ceramiczny pokrywający pręt na 1/13 jego długości (dokładny opis stanowiska, ciągle rozbudowywanego, zob. np. [40, 41, 43, 44])). Pręt nie jest izolowany cieplnie i wymiana ciepła zachodzi wzdłuż całej jego długości. Pomiar temperatury pręta jest dokonywany przy użyciu rezystancyjnego czujnika temperatury nawiniętego w przedziale  $[25l/52, 27l/52]$  długości pręta. Zmiana rezystancji czujnika jest odczytywana w układzie mostkowym i przetwarzana na sygnał prądowy przetwornikiem APU-11. Element grzejny jest również sterowany sygnałem prądowym. W ten sposób uzyskano prądowe wejście  $u$  i prądowe wyjście  $y$  (zob. rys. 25.1) w zakresie znormalizowanym 0–5 mA. Przeprowadzono również identyfikację parametrów modelu [15, 52] metodą najmniejszych kwadratów (np. [11]).

Rozkład temperatury  $x(z, t)$  w rozważanym pręcie można opisać następującymi równościami:

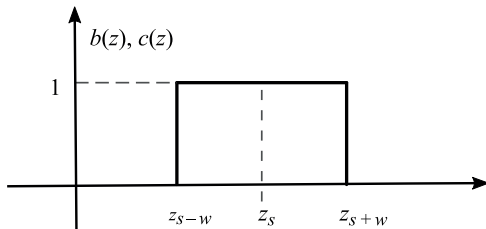
$$\begin{aligned} \frac{\partial x(z, t)}{\partial t} &= a \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} - R_a x(z, t) + b(z)u(t), \quad t \geq 0, z \in [0, 1], \\ \frac{\partial x(z, t)}{\partial z} \Big|_{z=0} &= \frac{\partial x(z, t)}{\partial z} \Big|_{z=1} = 0, \quad t \geq 0, \\ x(z, 0) &= 0, \quad z \in (0, 1), \quad y(t) = \int_0^1 c(z)x(z, t) dz. \end{aligned} \quad (25.1)$$

Symbolem  $x(z, t)$  oznaczono wartość temperatury w chwili  $t$  w punkcie o współrzędnej  $z$ . Funkcje charakterystyczne grzejnika i czujnika pomiarowego,  $b(z)$  i  $c(z)$ , dobrano eksperymentalnie. Mają one następujące postaci:

$$b(z) = \begin{cases} 1 & \text{dla } 0 \leq z \leq z_0, \\ 0 & \text{dla } z_0 < z \leq 1, \end{cases} \quad (25.2)$$

$$c(z) = \begin{cases} \bar{c} & \text{dla } z_1 \leq z \leq z_2, \\ 0 & \text{dla } 0 \leq z < z_1 \text{ i } z_2 < z \leq 1, \end{cases} \quad (25.3)$$

przy czym  $z_0 = 1/13$ ,  $z_1 = 25/52$ ,  $z_2 = 27/52$ ,  $c = 25,7922$ . Przykładowe funkcje charakterystyczne grzejnika i czujnika są pokazane na rys. 25.2.



Rysunek 25.2. Funkcje charakterystyczne grzejnika i czujnika pomiarowego

Zagadnienie graniczne (25.1) można interpretować jako abstrakcyjny układ (zob. np. [28, 34, str. 175, 176]) w przestrzeni Hilberta  $X$  z wejściem skalarnym  $u(t)$  i wyjściem skalarnym  $y(t)$  o postaci:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t), \quad X = L^2(0, 1; R), \quad (25.3)$$

Wykorzystując fakt [34, str. 177], że odpowiednio zdefiniowany operator  $A$  ma dyskretne widmo i związane z nim wektory (funkcje) własne stanowiące w  $X$  bazę tej przestrzeni, parametry układu (25.2) i jego rozwiązanie  $x(z, t)$  można przedstawić w postaci:

$$x(z, t) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t)h_i(z), \quad (25.5)$$

przy czym we wzorach (25.4) należy przyjąć:

$$\begin{aligned} A &= \text{diag}(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots), \\ B &= [b_0 \ b_1 \ b_2 \ \dots] T, \\ C &= [c_0 \ c_1 \ c_2 \ \dots], \\ x(t) &= [x_0(t) \ x_1(t) \ x_2(t) \ \dots] T, \end{aligned} \quad (25.6)$$

gdzie:

$$b_i = \int_0^1 b(z)h_i(z) dz, \quad c_i = \int_0^1 c(z)h_i(z) dz, \quad (25.7)$$

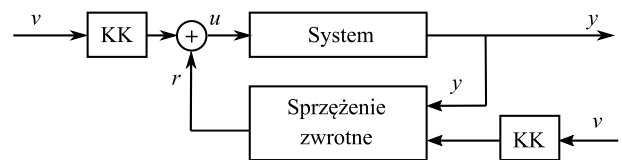
$$\lambda_i = -i^2\pi^2a - R_a, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (25.8)$$

oraz  $a = 0,000945$ ,  $R_a = 0,0271$ , a funkcje własne operatora  $A$  mają postać:

$$h_i(z) = \begin{cases} 1 & \text{dla } i = 0, \\ \sqrt{2} \cos(i\pi z) & \text{dla } i = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (25.9)$$

Dla modelu matematycznego w postaci (25.4) z parametrami (25.6) można w prosty sposób wykazać ([34, str. 232, 236]; rozważa się również optymalny w odpowiednim sensie krok impulsowania [34, str. 241]), że rozważany proces (25.1) nagrzewania pręta da się stabilizować skończeniem wymiarowym dynamicznym sprzężeniem zwrotnym (ciągłym lub dyskretnym w czasie). Parametry skończenie wymiarowego stabilizatora można wyznaczać technikami skończenie wymiarowymi.

Jako przykład projektowania układu regulacji procesem grzania pręta rozważymy układ schematycznie pokazany na rys. 25.3.



Rysunek 25.3. Schemat układu regulacji

Po przeprowadzeniu elementarnych rachunków można zauważyć, że w asymptotycznie stabilnym układzie regulacji z rys. 25.3 mamy następującą implikację:

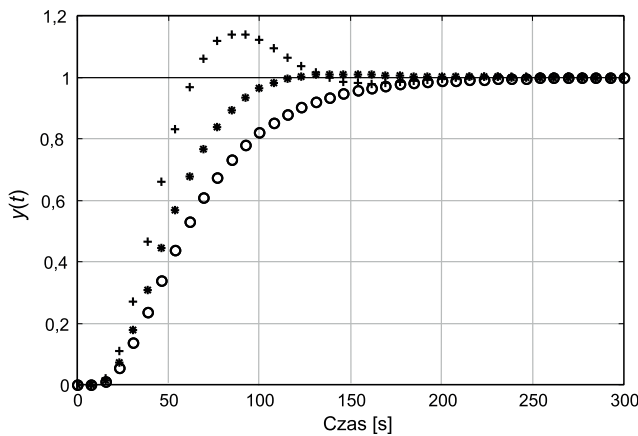
$$\text{jeśli } v(t) = \bar{v} = \text{const.}, \quad \text{to } y(t) \rightarrow \bar{v} \quad \text{przy } t \rightarrow \infty. \quad (25.10)$$

Nie wchodząc w szczegóły (wersja dyskretna zob. [44]), dynamiczne stabilizujące sprzężenie zwrotne zależy od dwóch parametrów  $K1$  oraz  $G1$ . Przykładowo dla  $KK = 1,2310$ ,  $K1 = -0,3003$ ,  $G1 = 9,8058$  stabilizujące sprzężenie zwrotne ma następującą postać:

$$\begin{bmatrix} \dot{w}_1(t) \\ \dot{w}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10,0231 & 0 \\ -0,0324 & -0,0358 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9,8058 & 0,0769 \\ 0 & 0,1077 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t) \\ v(t) \end{bmatrix}, \quad (25.11)$$

$$r(t) = -0,3003w_1(t),$$

oraz gwarantuje spełnienie warunku (25.10). Stałą  $KK$  wyznacza się z odpowiedniej charakterystyki statycznej układu. Odpowiednie eksperymenty symulacyjne przeprowadzono dla  $v(t) = 1(t)$ ; wyniki są pokazane na rys. 25.4. Symbolem „o” oznaczono przebieg czasowy  $y(t)$  dla układu otwartego (bez sprzężenia zwrotnego) przy  $KK = 0,9344$ . Symbolem „\*” oznaczono przebieg czasowy  $y(t)$  dla układu przy  $KK = 1,2310$ ,  $K1 = -0,3003$ ,  $G1 = 9,8058$ . Symbolem „+” oznaczono przebieg czasowy  $y(t)$  dla układu przy  $KK = 1,8730$ ,  $K1 = -0,9503$ ,  $G1 = 9,8058$ .



Rysunek 25.4. Wyjście  $y(t)$  przy  $v(t) = 1(t)$  dla trzech zestawów wartości wzmocnień

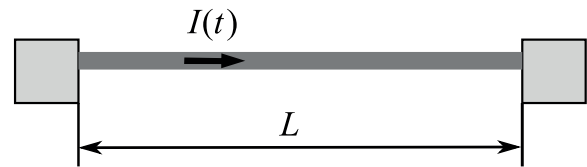
### Grzanie przewodu prądem elektrycznym

W tym podrozdziale rozważymy proces nagrzewania prądem elektrycznym o natężeniu  $I(t)$  przepływającym przez oporowy przewód elektryczny (zob. [29; 32, str. 183]) o długości  $L$ . Schemat układu jest pokazany na rysunku 25.5. Ilość ciepła [kcal] wytwarzanego w wyniku przepływu prądu elektrycznego o natężeniu  $I$  [A] przez przewód grzejny o oporze  $R$  [ $\Omega$ ] w czasie  $t$  [h] oblicza się ze wzoru  $Q = 860RI^2t$ . Opór przewodu zmienia się ze zmianą temperatury  $x$  zgodnie z zależnością  $R(x) = R_0(1 + \alpha x)$ , gdzie  $\alpha$  jest współczynnikiem temperaturowym oporu,  $R_0$  – opornością w temperaturze  $0^\circ\text{C}$ . Rozkład temperatury  $x(z, t)$  w przewodzie można opisać następującymi równościami ( $z$  jest zmienną przestrzenną,  $t$  oznacza czas):

$$a_p \frac{\partial x(z, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} + Q(z, t), \quad (25.12)$$

$$x(z, 0) = x_p, \quad t \geq 0, \quad x(0, t) = x_p, \quad x(L, t) = x_p, \quad 0 \leq z \leq L.$$

Gęstość źródeł ciepłych jest funkcją nieliniową o następującej postaci [29; 32, str. 184]:

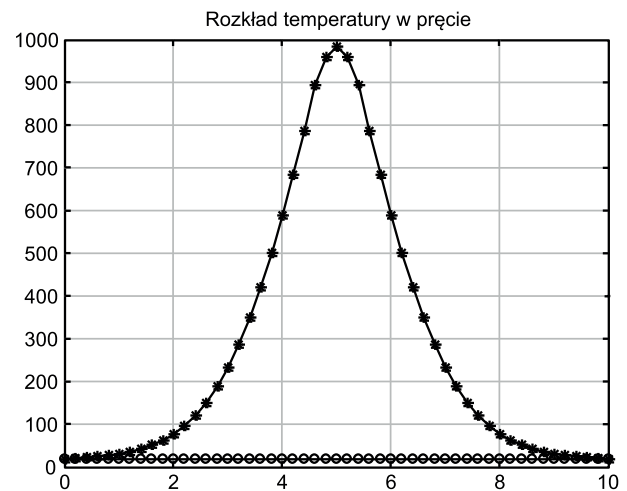


Rysunek 25.5. Grzanie grubego przewodu prądem elektrycznym

$$Q(z, t) = 860b(z)R_0 [1 + \alpha x(z, t)] I(t)^2, \quad (25.13)$$

gdzie  $b(z)$  jest odpowiednią funkcją (zob. rys. 25.2) o nośniku zwartym. Funkcja  $b(z)$  została dobrana eksperymentalnie, tak by powodować wzmocnienie grzania w środku przewodu (dla  $z_s = L/2$ ). Wprowadzenie tego rodzaju funkcji  $b(z)$  pozwala również uwzględnić złożone efekty cieplne powodowane nieliniowością współczynnika przewodzenia ciepła.

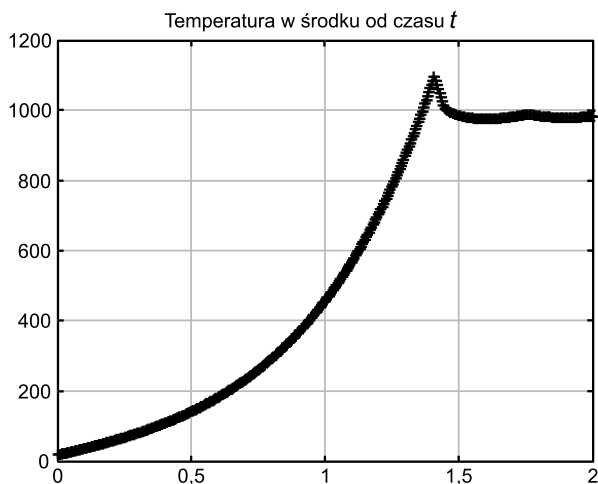
Obliczenia numeryczne wykonano, stosując odpowiedni schemat różnicowy otrzymany po dyskretyzacji zmiennej przestrzennej  $z$  i czasu  $t$ . Uzyskano zadziwiająco dobre rezultaty, które zostały potwierdzone eksperymentami praktycznymi. Szczegóły opisano w pracy [29]. Odpowiednie wyniki symulacji komputerowej są przedstawione na rys. 25.6–25.8. Na rysunku 25.6 widać rozkłady  $x(z, t_k)$  temperatury wzdłuż przewodu w końcowej chwili sterowania  $t_k = 2i$  w chwili początkowej  $t_0$ . Sterowanie realizowano, zmieniając natężenie prądu  $I(t)$  płynącego przez przewód. Na rysunku 25.6 jest pokazany przebieg temperatury  $x(L/2, t)$ , a na rys. 25.8 – przebieg prądu sterującego  $I(t)$ .



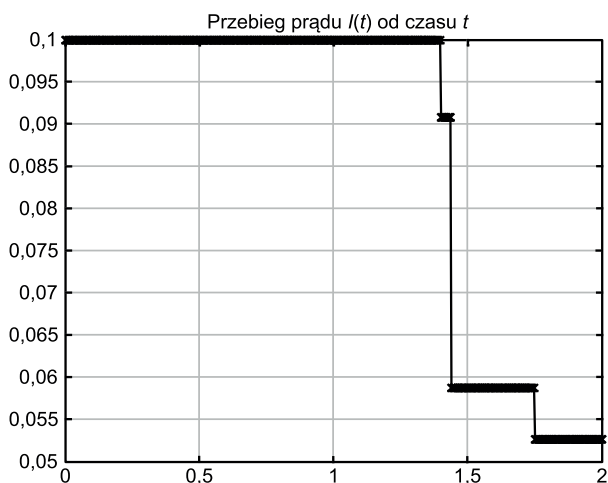
Rysunek 25.6. Początkowy (kółka) i końcowy (gwiazdki) rozkład temperatury w elektrycznym przewodzie oporowym

Wszystkie obliczenia były wykonane dla  $w = 2$  (zob. rys. 25.2). Parametr ten określa szerokość (nośnik) funkcji nieliniowej  $b(z)$ , a funkcja  $b(z)$  – wpływ nieliniowości współczynnika przewodzenia ciepła na proces nagrzewania. Współczynnik  $w$  został zidentyfikowany metodą najmniejszych kwadratów z wykorzystaniem pomiarów na obiekcie rzeczywistym.

Do poszukiwania algorytmów sterowania można wykorzystać metody matematyczne sterowania optymalnego [4].



Rysunek 25.7. Przebieg temperatury w czasie w środkowym punkcie oporowego przewodu elektrycznego



Rysunek 25.8. Sterowanie  $I(t)$  stabilizujące temperaturę w środku przewodu na temperaturze  $1000^{\circ}\text{C}$

W pracy zaproponowano (eksperymentalny) sposób sterowania pokazany na rys. 25.8, w wyniku otrzymując zmiany temperatury jak na rys. 25.6. W połowie przewodu utrzymywano następnie ustaloną z góry temperaturę  $1000^{\circ}\text{C}$  (zob. rys. 25.7). Tego rodzaju stabilizacja temperatury w połowie długości pręta umożliwiała przeprowadzenie odpowiednich prób plastometrycznych. Temperatura obu końców pręta była stała (pokojowa ok.  $20^{\circ}\text{C}$ ), wobec czego dostarczana energia powodowała znaczny wzrost temperatury w pobliżu środka pręta, doprowadzając materiał do granicy topliwości [46]. Proces nagrzewania sterowano prądem  $I(t)$ , tak by zwiększyć plastyczność pręta, ale nie doprowadzić do jego całkowitego stopienia. Stabilizacja temperatury w punkcie  $z = L/2$  gwarantowała, że nie nastąpi stopienie przewodu w wyniku zbyt wysokiej temperatury. Te prace były i są kontynuowane z metalurgami z AGH w skali laboratoryjnej (np. wspólne prace z M. Pietrzykiem i M. Suligą przeprowadzone w 2003 r., zob. również [72]).

### Sterowanie frontem przemiany fazowej

Rozważmy następujące zadanie (jednowarstwowe zagadnienie Stefana ze swobodną granicą [20, str. 178; 29, 30]): szukamy

funkcji czasu  $g(t)$ ,  $g(0) = z_N$  (gdzie  $z_N$  jest początkowym położeniem frontu przemiany fazowej  $g(t)$ ) oraz funkcji czasu i zmiennej przestrzennej  $x(z, t)$  opisującej temperaturę, takich że w obszarze  $0 \leq z \leq g(t)$ ,  $t \geq 0$  i na jego brzegu są spełnione następujące warunki:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x(z, t)}{\partial t} &= a^2 \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2}, & z \in [0, g(t)], \quad t \geq 0, \quad g(0) = z_N, \\ \lambda \frac{\partial x(0, t)}{\partial z} &= -\alpha [u(t) - \gamma x(0, t)], & x(z, 0) = \varphi(z), \quad z \in [0, z_N], \quad (25.14) \\ k \frac{\partial x(z, t)}{\partial z} \Big|_{z=g(t)} &= \rho q \frac{dg(t)}{dt}, & x(g(t), t) = 0, \end{aligned}$$

gdzie  $a^2 = k/(c\rho)$  jest współczynnikiem przewodnictwa termometrycznego,  $\lambda$  – współczynnikiem wymiany ciepła,  $\alpha$  – współczynnikiem przewodnictwa zewnętrznego,  $\rho$  i  $q$  są odpowiednio współczynnikiem ciepła przemiany fazowej oraz gęstością substancji krzepnącej,  $c$  jest ciepłem właściwym,  $k$  – przewodnictwem cieplnym. Pomocniczy współczynnik  $\gamma$  przyjmuje wartość 1 lub 0 w zależności od rozważanego warunku brzegowego.

Jeżeli  $\phi(z) < 0$ ,  $z \in [0, z_N]$  oraz  $u(t) - x(0, t) < 0$ , to warunki (25.14) mogą opisywać uproszczony proces krzepnięcia warstwy o grubości początkowej  $z_N$  przy stałej zerowej temperaturze przejścia fazowego.

W celu przeprowadzenia obliczeń numerycznych dokonajmy dyskretyzacji zmiennej przestrzennej  $z$  ze stałym krokiem  $h = z_N/N$ , gdzie  $N$  jest zadaną z góry liczbą naturalną. Odpowiednią sytuację pokazano schematycznie na rys. 25.9. Dalsze tworzenia odpowiedniego schematu różnicowego jest szczegółowo opisane w pracy [29]. Początkowe położenie frontu przemiany fazowej  $g(t)$  (np. pomiędzy fazą stałą i ciekłą) oznaczono symbolem  $z_N$ . Wprowadźmy oznaczenia  $z_i = ih$  oraz niech dyskretna chwila czasu  $t_j$  oznacza taką wartość  $t$ , dla której front krzepnięcia  $g(t_j) = z_{N+j}$ . Dalej niech  $x[i, j] = x(z_i, t_j) = x[j]$ , gdzie  $t_j = t_{j-1} + \tau$  ( $j = 1, 2, \dots, NN$ ),  $t_0 = 0$ . Po przekształceniach [29] z (25.14) otrzymano następujące schematy różnicowe:

$$x[j] = [I - \tau(j-1)A]^{-1} [x[j-1] + \tau(j-1)Bu[j]], \quad (25.15)$$

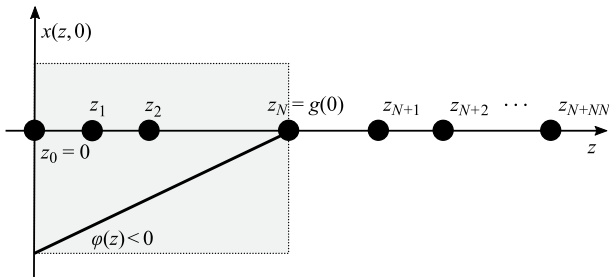
$$\tau(j-1) = -\frac{\rho q h^2 / k}{x[N+j-2, j-1]}, \quad (25.16)$$

przy czym  $j = 1, 2, \dots, NN$ ,  $x[0]$  jest zadane przez rozkład początkowy  $\phi(z) < 0$ . Na przykład, dla  $N + j - 1 = 7$ ,  $j = 4$ ,  $N = 4$  mamy

$$A = \frac{a^2}{h^2} \begin{bmatrix} F-2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \frac{a^2}{h^2} \begin{bmatrix} G \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (25.17)$$

przy czym

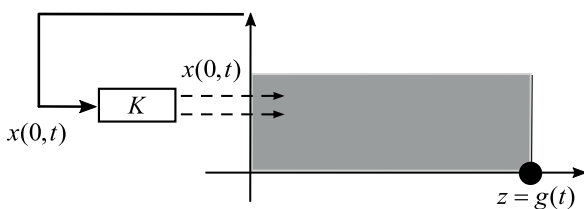
$$F = \frac{\lambda}{\lambda + \alpha h}, \quad G = \frac{\alpha h}{\lambda + \alpha h \gamma}. \quad (25.18)$$



Rysunek 25.9. Początkowy rozkład temperatury

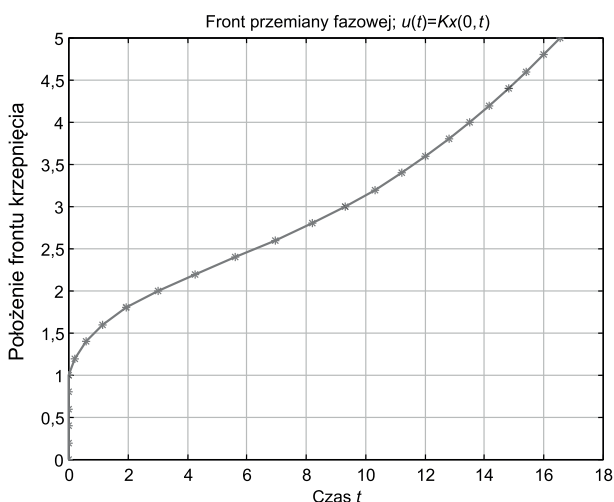
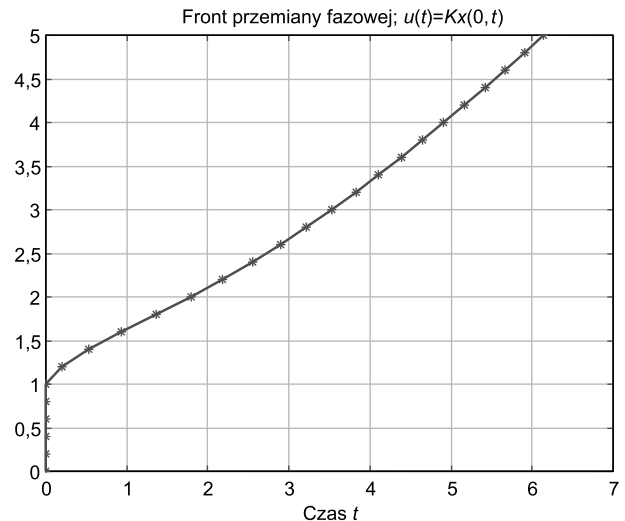
Możliwe jest też sterowanie frontem przemiany fazowej przez odpowiednią zmianę temperatury  $u(t)$ . Rozważmy jednowarstwowy problem przemiany fazowej opisany warunkami (25.14). Warstwa o grubości początkowej  $z_N$  jest lewostronnie chłodzona (sterowanie  $u(t) < 0$ ). Do sterowania przebiegiem przemiany fazowej można zastosować układ regulacji pokazany na rys. 25.10. Tego rodzaju układ regulacji do stabilizacji temperatury wzdłuż pręta zaproponowano w pracy [63]. Warto wspomnieć, że zaproponowany układ regulacji otrzymano, stosując metodę funkcjonalów Lapunowa. W naszym przypadku regulator ma następującą postać:

$$u(t) = Kx(0, t), \quad K > 0. \quad (25.19)$$



Rysunek 25.10. Regulacja frontu krystalizacji

Przykładowe obliczenia numeryczne przeprowadzono i przedstawiono poniżej dla  $a = 1$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\alpha = 1$ ,  $k = 1$ ,  $\rho = 1$ ,  $q = 1$ ,  $z_N = 1$ , przy czym  $h = z_N/N$ . Niech w układzie (25.14) stała  $\gamma = 1$  oraz  $u(t) = Kx(0, t)$ . Na rysunkach 25.11 i 25.12 przedstawiono

Rysunek 25.11. Front krystalizacji w funkcji czasu dla  $K = 1,8$ Rysunek 25.12. Front krystalizacji w funkcji czasu dla  $K = 1,5$ 

wyniki symulacji położenia frontu otrzymane ze schematu różnicowego (25.15), (25.16) i (25.19) przy  $N = 5$ ,  $NN = 20$ , odpowiednio, dla  $K = 1,5$  oraz  $K = 1,8$ .

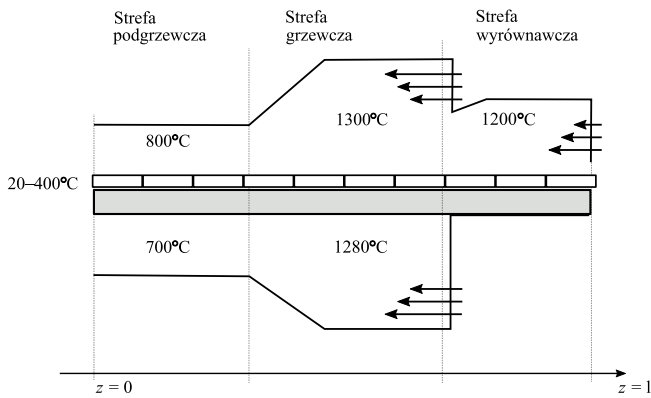
Z przedstawionych wyników pokazanych na rys. 25.11 i 25.12 wynika, że szybkość przesuwania się frontu krzepnięcia zależy od współczynnika wzmocnienia regulatora  $K$ . Zmiany prędkości przemieszczania się frontu krzepnięcia mają zasadniczy wpływ na defekty struktury krzepnącego materiału.

Dokładniejsze badania symulacyjne pokazały, że poprawne wyniki można uzyskać tylko w pewnym zakresie zmian  $K$ . Potrzebne są dalsze badania, bowiem w pewnych przypadkach występuje niestabilność numeryczna schematu numerycznego (25.16), przez co uzyskane obliczenia są błędne.

### Nagrzewanie cienkich słabów w piecu grzewczym

Praktyczne wykorzystanie problemu L-Q w przemyśle hutniczym [28; 35 s. 49–61] zostanie pokazane na przykładzie nagrzewania cienkich słabów w piecu grzewczym (zob. schemat pieca grzewczego pokazany na rys. 25.13). Po dokonaniu dyskretyzacji zmiennej przestrzennej z do opisu obiektu o parametrach rozłożonych wykorzystamy model skończone wymiarowy. Zadanie stabilizacji temperatury w piecu grzewczym zostanie sformułowane jako odpowiedni problem liniowo-kwadratowy (problem L-Q). Przedstawimy zadanie odtwarzania stanu (odtworzenia rozkładu temperatury wzdłuż pieca grzewczego z odpowiednich danych pomiarowych) oraz wyniki obliczeń numerycznych (rozwiązanie numeryczne algebraicznego równania Riccatiego wykorzystywanego do określenia wzmocnienia regulatora) z wykorzystaniem pakietu programowego Matlab/Simulink.

W przemyśle hutniczym spotykamy się z problemem sterowania rozkładem temperatury w piecu grzewczym. Przykładowy schemat pieca grzewczego [5, str. 432; 6, str. 66] pokazano na rys. 25.13. Na wejściu do pieca znajdują się słaby otrzymane i podawane np. z instalacji ciągłego odlewania stali. W ostatnich latach w wielu hutach zainstalowano instalacje ciągłego odlewania stali (np. Huta Sendzimir w Krakowie), na których wyjściu otrzymuje się słaby o jednakowych wymiarach, co ułatwia dalszy proces nagrzewania. Interesuje nas



Rysunek 25.13. Schemat pieca grzewczego

stabilizacja temperatury  $x(l, t)$  na wyjściu z pieca grzewczego (np. dla pieca o długości  $l = 27$  m, szerokości 20 m oraz słabów o wymiarach  $6 \text{ m} \times 0,6 \text{ m} \times 0,15 \text{ m}$ ). W przypadku słabów „cienkich” dobrym modelem matematycznym procesu [5, str. 4; 6, str. 64; 12; 15; str. 283] jest równanie różniczkowe cząstkowe o następującej postaci (równanie „transportu”):

$$b(z, t) \frac{\partial x(z, t)}{\partial t} + b(z, t)v(t) \frac{\partial x(z, t)}{\partial z} + x(z, t) = u(z, t), \quad (25.20)$$

$$x(0, t) = x^p(t), \quad x(z, 0) = x^0(z),$$

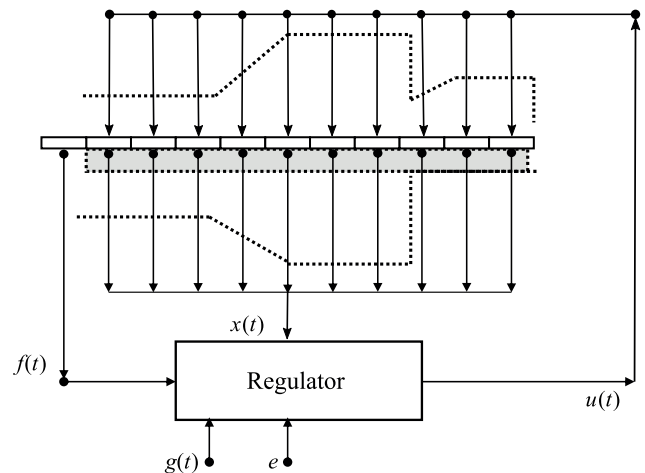
gdzie  $z$  jest jednowymiarową zmienną przestrzenną,  $t$  jest chwilą czasu,  $b(z, t)$  – odpowiednim współczynnikiem przewodzenia ciepła,  $v(t)$  – prędkością przechodzenia słabów przez piec,  $u$  – sterowaniem rozkładem temperatury  $x(z, t)$  w przestrzeni i w czasie, uzyskiwanym przez regulację temperatury płomieni odpowiednio rozmieszczonych palników gazowych wewnątrz pieca. Do określenia grubości słabów wykorzystuje się liczbę Biota  $Bi = \alpha S/\lambda$ , gdzie  $\alpha$  jest współczynnikiem konwekcyjnego wnikania ciepła,  $S$  – grubością slabu, a  $\lambda$  – współczynnikiem przewodności cieplnej. Slab można nazwać cienkim, gdy  $Bi \leq 0,25$  [5, str. 15; 6, str. 64].

W książce [5] można znaleźć bardziej złożone modele matematyczne procesu nagrzewania słabów w piecu grzewczym, uwzględniające np. trzy zmienne przestrzenne. W zastosowaniach spotyka się co najmniej dwa sposoby postępowania: budowa bardzo dokładnego modelu matematycznego lub budowa możliwie prostego modelu matematycznego. Stosowanie modeli dokładnych jest ostatnio możliwe dzięki dużej mocy obliczeniowej stosowanych komputerów. Zastosowanie modelu uproszczonego, w którym nie tracimy istotnych właściwości obiektu rzeczywistego, jest poznawczo interesujące (wgląd w istotę rzeczy) oraz umożliwia efektywniejsze stosowanie algorytmów sterowania w czasie rzeczywistym.

Celem sterowania jest stabilizacja temperatury wewnątrz i na wyjściu z pieca do zadanego z góry rozkładu temperatury. Oznaczmy wektorem  $g$  przybliżony (w wybranych punktach wzdłuż długości pieca) pożądany rozkład temperatury. Schemat układu regulacji realizujący nasz cel pokazano na rys. 25.14. Funkcja syntetyzująca regulator ma następującą postać [14, str. 150, 160, 164, 171, 175]:

$$u(t) = -R(t)^{-1}B(t)^T \{K(t)[x(t) - \beta(t)] + k(t)\}, \quad (25.21)$$

przy czym parametry  $K(t)$ ,  $k(t)$  i  $\beta(t)$  sprzężenia zwrotnego (25.21) będą określone poniżej. Podobnie inne parametry  $f(t)$ ,  $g(t)$  i  $e$  układu regulacji, pokazane na rys. 25.14, będą określone poniżej.



Rysunek 25.14. Schemat układu regulacji

W wyrażeniu (25.21)  $K(t)$  jest rozwiązaniem równania różniczkowego (nazywanego różniczkowym równaniem Riccatego) o następującej postaci:

$$\dot{K}(t) = K(t)B(t)R(t)^{-1}B(t)^TK(t) - A(t)^TK(t) - K(t)A(t) - C(t)^TC(t), \quad (25.22)$$

$$K(T_k) = E^TE, \quad t \in [0, T_k], \quad K(t)^T = K(t) \geq 0.$$

Funkcja czasu  $k(t)$  występująca w równości (25.21) jest określona równaniem:

$$\dot{k}(t) = [K(t)B(t)R(t)^{-1}B(t)^T - A(t)^T]k(t) - C(t)^T[g(t) + C(t)\beta(t)], \quad (25.23)$$

$$k(T_k) = E^T[E\beta(T_k) + e],$$

a funkcja  $\beta(t)$  jest rozwiązaniem równania różniczkowego o następującej postaci:

$$\dot{\beta}(t) = A(t)\beta(t) + f(t), \quad \beta(0) = 0. \quad (25.24)$$

Równość (25.21) określa afiniczny, niestacjonarny regulator optymalny w sensie minimalizacji wskaźnika jakości (np. [14, str. 179–182]) określonego następująco:

$$J(u; T_k) = E \cdot x(T_k) + e^2 + \int_0^{T_k} [C(t)x(t) + g(t)^2 + \sqrt{R(t)}u(t)^2] dt, \quad (25.25)$$

przy ograniczeniach stanowiących skończenie wymiarową aproksymację modelu (25.20) w postaci następującego liniowego równania różniczkowego:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + f(t). \quad (25.26)$$

Intuicyjnie jest zrozumiałe, że nasz cel sterowania osiągniemy, minimalizując wskaźnik jakości (25.25). W zależności od sposobu aproksymacji równania (25.20) możemy otrzymywać różne skończenie wymiarowe modele przybliżone o postaci (25.26). W dalszych rozważaniach wielkość  $xi(t) = x(ih, t)$  można w przybliżeniu uznać za temperaturę

ślaba wewnątrz pieca w punkcie  $z = ih, h > 0, i = 0, 1, 2, \dots, n, h = l/n$  i w chwili czasu  $t$ . Mamy zatem  $x(t) = [x_1(t) \dots x_n(t)]^T, u_i(t) = u(ih, t), u(t) = [u_1(t) \dots u_n(t)]^T$ . Funkcja  $f(t)$  w modelu przybliżonym (25.26) jest zależna od temperatury słabów  $x^p(t)$  na wejściu do pieca. Przy zadanych  $x^p, x^0$  oraz  $u$  równanie (25.26) ma jednoznacznie określone rozwiązanie  $x$ . W równości (25.25), określającej wskaźnik jakości,  $T_k$  jest końcowym czasem sterowania, macierz rzeczywista  $R(t) > 0$  (dodatnio określona) jest odpowiednio regularną po czasie macierzą symetryczną,  $E$  i  $C(t)$  są macierzami o odpowiednich wymiarach,  $e$  jest wektorem,  $g$  jest wektorową funkcją, np. ciągłą w czasie.

Dla przykładu dla  $n = 3$  (co nie ogranicza ogólności rozważań, ale upraszcza zapis wzorów) można przyjąć:

$$E = C(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \end{bmatrix}, \quad g(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x^*(t) \end{bmatrix}, \quad e = g(T_k), \quad (25.27)$$

gdzie  $x^*$  jest zadany z góry przebiegiem temperatury na wyjściu z pieca. W równościach (25.27) ze względów fizycznych można również przyjąć  $C(t) = [0 \ 0 \ -\gamma]$ , ale ogólnie wygodniej jest operować macierzą kwadratową (większa możliwość interpretacji wskaźnika (25.25)). Podobnie dla  $n = 3$  w równości (25.26), stosując odpowiednie ilorazy różnicowe, można przyjąć [28, 24]:

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_1(t) & 0 & 0 \\ c(t) & a_2(t) & 0 \\ 0 & c(t) & a_3(t) \end{bmatrix}, \quad B(t) = \begin{bmatrix} b_1(t)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & b_2(t)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & b_3(t)^{-1} \end{bmatrix}, \quad (25.28)$$

gdzie

$$a_i(t) = -\frac{1}{b_i(t)} - c(t), \quad c(t) = \frac{v(t)}{h}, \quad b_i(t) = b(ih, t) \quad (25.29)$$

oraz

$$f(t) = [c(t) \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T x^p(t). \quad (25.30)$$

Na podstawie funkcji  $f(t)$  zależnej od temperatury mierzonej na wejściu do pieca, pomiaru temperatury  $x(t)$  wzdłuż pieca oraz na podstawie znajomości zadanego z góry, pożądanego rozkładu temperatury  $g(t)$  i zadanej temperatury na wyjściu z pieca  $e$ , regulator (25.21) generuje sterowanie  $u(t)$  określające temperaturę płomieni palników rozmieszczonych wzdłuż długości pieca. Schemat optymalnego układu regulacji pokazano na rys. 25.14.

W praktyce nie jest możliwy pomiar temperatury  $x(t)$  wzdłuż pieca. Mierzona jest jedynie temperatura w wybranych punktach przestrzennych. Dostępne pomiarowo jest wyjście z systemu, np.  $y(t) = C(t)x(t) = xn(t)$ . W takim przypadku można stosunkowo prosto odtworzyć stan układu w sposób asymptotyczny, wykorzystując układy dynamiczne nazywane obserwatorami (odtworzacami) Luenbergera (np. [34, str. 88]). Obserwator na podstawie pomiaru sterowania  $u(t)$  i wyjścia  $y(t) = C(t)x(t)$  generuje estymatę stanu  $\hat{x}(t)$ , przy czym  $\hat{x}(t) \rightarrow x(t)$ , gdy  $t \rightarrow \infty$ . W tym przypadku w miejsce regulatora (25.21) można użyć sprzężenia zwrotnego o postaci:

$$u(t) = -R(t)^{-1} B(t)^T \{K(t)[\hat{x}(t) - \beta(t)] + k(t)\}. \quad (25.31)$$

reklama

Bardzo proste wyniki uzyskujemy w przypadku stacjonarnym przy  $T_k \rightarrow \infty$ . Jeżeli w (25.25) i (25.26) odpowiednie macierze i wektory  $A, B, C, R, E = 0, g, e = 0$  są rzeczywiste i stałe oraz para  $(A; B)$  jest stabilizowalna, a para  $(C; A)$  jest wykrywalna, to [14, str. 179–182]:

$$K(t) \rightarrow K = \text{const}, \quad \text{gdy } T_k \rightarrow +\infty, \quad (25.32)$$

gdzie  $K = \text{const}$  jest jedynym rozwiązaniem algebraicznego równania Riccatiego

$$KBR^{-1}B^TK - A^TK - KA - C^TC = 0, \quad \text{takim że } K = K^T \geq 0 \quad (25.33)$$

oraz macierz stanu systemu zamkniętego jest wykładniczo stabilna (wartości własne macierzy stanu systemu zamkniętego mają ujemne części rzeczywiste), czyli:

$$\text{Re} \lambda [A - BR^{-1}B^TK] < 0. \quad (25.34)$$

Przykładowe obliczenia numeryczne są pokazane dla przypadku stacjonarnego. Rozwiązanie numeryczne algebraicznego równania Riccatiego (25.33) otrzymano, wykorzystując pakiet programowy Matlab/Simulink. Do obliczeń przyjęto  $E = 0, \gamma = -1, l = 1, b = 100, v = 0, 1, R = 1$  (zob. (25.25)–(25.30)) przy odpowiednich następujących, stałych wartościach:

$$a_i(t) = a = -\frac{1}{b} - c, \quad c = \frac{v}{h}, \quad h = l/n, x_i(0) = 1. \quad (25.35)$$

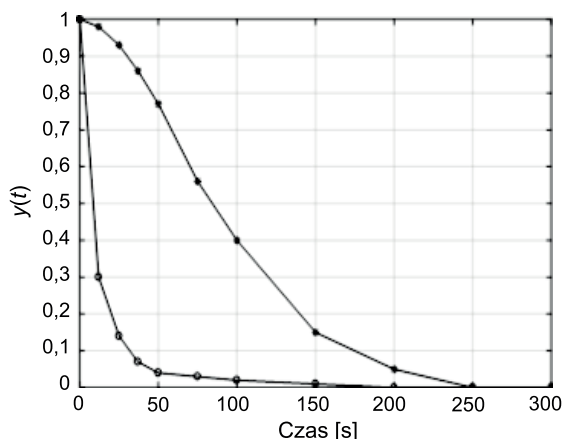
W wyniku numerycznego rozwiązania algebraicznego równania Riccatiego (25.33) dla  $n = 3$  otrzymano:

$$K = \begin{bmatrix} 0,0351 & 0,0427 & 0,0281 \\ 0,0427 & 0,0924 & 0,1506 \\ 0,0281 & 0,1506 & 0,7257 \end{bmatrix}, \quad \|K\| = 0,7615 \quad (25.36)$$

oraz następujące wartości własne macierzy  $A - BR^{-1}B^TK$  układu zamkniętego:

$$\{-1,0035, -0,3899 + 0,1066j, -0,3899 - 0,1066j\},$$

Wartości własne mają ujemne części rzeczywiste, czyli układ zamknięty jest asymptotycznie stabilny.



Rysunek 25.15. Wyjście  $y(t) = x_n(t)$  z systemu otwartego (gwiazdki) i zamkniętego (kółka)

Na rysunku 25.15 pokazano przebiegi temperatury  $y(t) = x_n(t)$  na wyjściu z pieca, odpowiednio, dla  $u(t) = 0$  (linia cienka) oraz dla sterowania optymalnego (linia gruba) w sensie wskaźnika (25.25)  $u_o(t) = -R^{-1}B^TKx_o(t)$  dla  $x^*(t) = 0$ . Wartość wskaźnika jakości (25.25) wynosi odpowiednio  $J(0) = 6,3607$  oraz  $J(u_o) = 0,6478$ . Jak widać, zastosowany układ regulacji znacznie poprawił (zmniejszył) wartość rozważanego wskaźnika jakości (25.25) z odpowiednimi współczynnikami.

### Modele cząstkowe niecałkowitego rzędu

Procesy cieplne są ciągle w centrum zainteresowania badaczy wykorzystujących rezultaty nauk stosowanych. Rozwój środków informatycznych pozwala na rozwiązywanie nowych klas modeli matematycznych opisujących procesy cieplne i inne procesy, np. związane z dyfuzją czy też dyfuzją i turbulencją. Ostatnio powraca się coraz częściej do modeli w postaci różnych typów równań różniczkowych niecałkowitego rzędu. Rachunek całkowo-różniczkowy niecałkowitego rzędu został najprawdopodobniej wprowadzony i stosowany już w latach 1695–1822 przez de l’Hospitála (1661–1704), Leibniza (1646–1716), Newtona (1643–1727) oraz Eulera (1707–1783) i Laplace’a (1749–1827). Dalszy rozwój teorii i zastosowań układów niecałkowitego rzędu nastąpił w XIX i XX w. W ostatnich latach ze względu na rozwój narzędzi informatycznych wielu autorów zainteresowało się problematyką równań różniczkowych niecałkowitego rzędu (np. [17, 36, 39, 47, 49, 50, 51, 55, 58, 61, 62, 64]), które pojawiają się w licznych zastosowaniach, np.: transport masy, różnego rodzaju przepływy, rozkłady temperatury w materiałach, dyfuzja, dyspersja, superkondensatory [36] i wiele innych zastosowań [27]. W ostatnich latach opracowano również algorytmy poszukiwania rozwiązań numerycznych układów niecałkowitego rzędu, które są ogólnie dostępne, np. w pakiecie programowym Matlab/Simulink. Stosuje się różne metody modelowania układów o stałych rozłożonych [1, 12, 18, 19, 65], w szczególności do modelowania układów cieplnych wykorzystuje się np. elektryczne układy łańcuchowe [25, 47].

Wybrane przykłady rozważanych w literaturze równań dyfuzji podajemy poniżej [39, 49].

Ułamkowe równanie adwekcji-dyspersji jest stosowane np. do modelowania przepływu cieczy w porowatych materiałach. Ma ono następującą postać:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = K_\alpha \frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial |x|^\alpha} + K_\beta \frac{\partial^\beta u(x, t)}{\partial |x|^\beta}, \quad (25.37)$$

$$0 \leq t \leq T, \quad 0 < x < L, \quad 1 < \alpha < 2, \quad 0 < \beta < 1, \quad K_\alpha \neq 0, \quad K_\beta \neq 0.$$

Dodatkowo określa się warunki początkowe  $u(x, 0) = g(x)$  oraz brzegowe, np.  $u(0, t) = u(L, t) = 0$ . Odpowiednie wielkości oznaczają:  $u(x, t)$  – stężenie substancji rozpuszczonej,  $K\alpha$  – współczynnik dyspersji,  $K\beta$  – średnią prędkość płynu. Zmienna  $x$  jest zmienną przestrzenną,  $t$  oznacza czas.

Przy opisie procesów dyfuzji wykorzystuje się często ułamkowe równanie Rieszdy dyfuzji o postaci (zob. [49]), podobnie wcześniej [48], gdzie opisano szczegółowo badania eksperymentalne z wykorzystaniem termokamery):

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = K_\alpha \frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial |x|^\alpha}, \quad (25.38)$$

$$0 \leq t \leq T, \quad 0 < x < L, \quad 1 < \alpha < 2, \quad K_\alpha \neq 0.$$

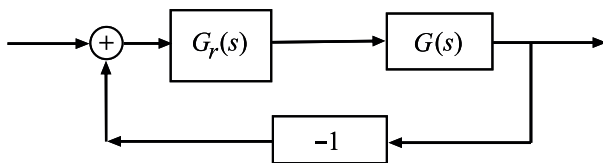


Dodatkowo w równaniu (25.38) określa się warunki początkowe  $u(x, 0) = g(x)$  oraz warunki brzegowe, np.  $u(0, t) = u(L, t) = 0$ . Dysponując pomiarami odpowiednich wielkości, można metodami identyfikacji wyznaczać m.in. niecałkowity rząd  $\alpha$  rozważanego układu. Zwykle stosuje się różne modyfikacje metody najmniejszych kwadratów.

Istnieje ciąg prac (np. [55]), w których w miejsce modelu matematycznego (25.1) rozważa się następujący problem graniczny niecałkowitego rzędu  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha x(z, t)}{\partial t^\alpha} &= a \frac{\partial^\beta x(z, t)}{\partial z^\beta} - R_a x(z, t) + b(z)u(t), \quad t \geq 0, z \in [0, 1], \\ \frac{\partial x(z, t)}{\partial z} \Big|_{z=0} &= \frac{\partial x(z, t)}{\partial z} \Big|_{z=1} = 0, \quad t \geq 0, \\ x(z, 0) &= 0, \quad z \in (0, 1), \quad y(t) = \int_0^1 c(z)x(z, t) dz. \end{aligned} \quad (25.39)$$

Rachunek różniczkowo-całkowy niecałkowitego rzędu wykorzystuje się również w projektowaniu klasycznych układów regulacji. Przez odpowiedni wybór niecałkowitego rzędu  $\alpha$  można uzyskać poprawę jakości regulacji (zamodelować odpowiedni przebieg przejściowy w układzie regulacji). Przykładowy układ regulacji pokazano na rys. 25.16, przy czym odpowiednie transmitancje są zastępowane transmitancjami układów niecałkowitego rzędu. Dokładniejszy opis układu podano np. w pracach [50, 51], a dyskretne sprzężenie w [41, 42].



Rysunek 25.16. Układ regulacji

Problem projektowania układu regulacji z rys. 25.16 sprowadza się do wyznaczenia parametrów (w szczególności niecałkowitego rzędu  $\alpha$  i niecałkowitego rzędu  $\beta$ ) transmitancji regulatora o postaci:

$$G_r(s) = k_p + k_\alpha s^{-\alpha} + k_\beta s^\beta. \quad (25.40)$$

### Uwagi końcowe

Interesujące są również prace dotyczące sterowania procesami cieplnymi w budynkach mieszkalnych, np. [2, 7, 10].

Przy modelowaniu rozkładu temperatury w budynkach wykorzystuje się układy łańcuchowe różnych typów, które opisano np. w [8, 25, 36, 10, 7]. Praca była wykonywana w ramach projektu badawczego 1.11.120.817-AGH.

### Literatura

- [1] Auer A.: Modelowanie analogowe procesów o stałych rozłożonych, Małe Monografie PWN, PWN, Warszawa 1976.
- [2] Baranowski J., Długosz M., Ganobis M., Skruch P., Mitkowski W.: Applications of mathematics in selected control and decision processes, *Matematyka Stosowana Numer Specjalny*, tom 12/53, str. 65–90, 2011.
- [3] Baranowski J., Długosz M., Mitkowski W.: Remarks about DC motor control, *Archives of Control Sciences*, 18(LIV)(3): 289–322, 2008.
- [4] Bołtianski W.G.: Matematyczne metody sterowania optymalnego, WNT, Warszawa 1971.
- [5] Butkowski A.G.: Teorija optimalnowo uprawlenija sistemami s rasprediellenymi paramietrami, Nauka, Moskwa 1965.
- [6] Ciepela A., Kozioł R.: Automatyka kompleksowa procesów przemysłowych na przykładzie walcowni, WNT, Warszawa 1978.
- [7] Długosz M.: Agregation of state variables in an RC model, *Building Services Engineering Research and Technology*, 39(1): 66–80, 2018.
- [8] Długosz M., Chronowski J., Baranowski J., Piątek P., Mitkowski W., Skruch P.: Bezprzewodowy system automatyki domowej pracujący w standardzie sieci Z-Wave, *Pomiary Automatyka Robotyka*, (7–8): 100–106, 2013.
- [9] Długosz M., Mitkowski W., Pietrzyk W.: Modelowanie i sterowanie tlenowym procesem konwertorowym, *Informatyka w Technologii Materiałów*, 3(2): 61–71, 2003.

Wojciech Mitkowski

AGH-Kraków, Wydział EAIIB, Katedra Automatyki i Robotyki

Krzysztof Oprzędkiewicz

AGH-Kraków, Wydział EAIIB, Katedra Automatyki i Robotyki

Fragmentu pochodzi z książki:

Piotr Kulczycki, Józef Korbicz, Janusz Kacprzyk

„Automatyka, robotyka i przetwarzanie informacji”

Wydawnictwo Naukowe PWN